ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2011
Institut National des Postes et Télécommunications
INPT

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2011

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Premier problème

Soit p est un entier naturel non nul ; on note w_p le nombre complexe défini par $w_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$.

Par définition, la transformation de Fourier discrète de $\mathbb{C}^p$ est l'application $\Phi_p : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p$ qui à tout vecteur $x = (x_0, \ldots, x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ associe le vecteur $y = (y_0, \ldots, y_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ dont les composantes $y_0, \ldots, y_{p-1}$ sont définies, pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, par

$$y_k = P_x({w_p}^k),$$

où P_x est le polynôme à coefficients complexes défini par $P_x = \sum_{j=0}^{p-1} x_j X^j$.

1ère partie
Quelques propriétés de Φ_p

1.1. Soit $x = (x_0, \ldots, x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$.

1.1.1. Montrer que $\Phi_p(x) = 0$ si, et seulement si, le polynôme P_x est nul.

1.1.2. Montrer que Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.

1.2. On note $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_{p-1})$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ et on note M la matrice de l'endomorphisme Φ_p dans cette base ; on écrit $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant p-1}$.

1.2.1. Préciser, pour tout $(i,j) \in \{0, \ldots, p-1\}^2$, l'expression du coefficient $m_{i,j}$.

1.2.2. En utilisant M retrouver le fait que l'endomorphisme Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.

1.3. Soit $x = (x_0, \ldots, x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$; on note $\Phi_p(x) = (y_0, \ldots, y_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$.

1.3.1. Si $(i,j) \in \{0, \ldots, p-1\}^2$, préciser selon les cas la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{p-1} {w_p}^{(i-j)k}$.

1.3.2. Montrer que $\sum_{k=0}^{p-1} |y_k|^2 = p \sum_{k=0}^{p-1} |x_k|^2$ et retrouver l'injectivité de Φ_p.

1.4. On note $\overline{M}$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dont le coefficient d'indice (i,j) est égal au conjugué $\overline{m_{i,j}}$ du complexe $m_{i,j}$, pour tout $(i,j) \in \{0, \ldots, p-1\}^2$.

1.4.1. Calculer le produit matriciel $\overline{M}M$.

1.4.2. En déduire l'expression de l'inverse de la matrice M.

2ème partie
Un peu d'algorithmique

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $p = 2^n$. On considère un élément $a = (a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ et on pose

$$b = (a_0, a_2, \dots, a_{p-2}) \in \mathbb{C}^{\frac{p}{2}} \quad \text{et} \quad c = (a_1, a_3, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^{\frac{p}{2}}.$$

On suppose qu'on connaît les transformées de Fourier discrètes de b et c, et on cherche à calculer celle de a ; on pose donc

$$\Phi_{\frac{p}{2}}(b) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{\frac{p}{2}-1}) \quad \text{et} \quad \Phi_{\frac{p}{2}}(c) = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\frac{p}{2}-1}).$$

2.1. On considère l'algorithme suivant dans lequel " : =" désigne le symbole d'affectation et "$*$" celui de la multiplication :

```
E :=   1 ;
pour   k de 0 à (p/2 − 1) faire :
       début
       F := E ∗ γ_k ; α_k := β_k + F ; α_{k+p/1} := β_k − F ; E := w_p ∗ E ;
       fin.
```

2.1.1. Pour $k \in \{0, 1, \dots, \frac{p}{2} - 1\}$, on note F_k la valeur de la variable F à l'étape k de la boucle "pour" ; préciser les valeurs de F_k, α_k et $\alpha_{k+\frac{p}{2}}$ en fonction de w_p, γ_k et β_k.

2.1.2. Montrer que cet algorithme permet bien de calculer $\Phi_p(a)$, c'est à dire que

$$\Phi_p(a) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}).$$

2.2. On considère l'algorithme récursif suivant pour le calcul de $\Phi_{2^n}(a)$:
– si $n = 1$ alors $\Phi_2(a_0, a_1) = (a_0 + a_1, a_0 - a_1)$;
– sinon, $\Phi_{2^n}(a)$ s'obtient à partir de $\Phi_{2^{n-1}}(b)$ et $\Phi_{2^{n-1}}(c)$ par l'algorithme proposé ci-dessus.

On note s_n (resp. r_n) le nombre des additions (resp. multiplications) complexes nécessaires au calcul de $\Phi_{2^n}(a)$ à l'aide de cette algorithme récursif ; les nombres w_p étant supposés connus.

2.2.1. Préciser les valeurs initiales s_1 et r_1 et exprimer s_n et r_n en fonction de s_{n-1}, r_{n-1} et n.

2.2.2. En déduire, en fonction de n, le nombre total des additions et multiplications nécessaires au calcul de $\Phi_{2^n}(a)$ puis exprimer ce nombre en fonction de p.

2.3. Coût du calcul de $\Phi_p(a)$ par l'algorithme de Hörner

On a vu que le calcul de $\Phi_p(a)$ nécessite celui de $P_a(w_p^k)$ pour $k \in \{0, \dots, p-1\}$, où $P_a = \sum_{j=0}^{p-1} a_j X^j$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; le calcul de $P_a(\lambda)$ par l'algorithme de Hörner consiste à écrire

$$P_a(\lambda) = (\dots((a_{p-1}.\lambda + a_{p-2}).\lambda + a_{p-3})\dots + a_1)\lambda + a_0.$$

2.3.1. Préciser, en fonction de p, le nombre total des additions et multiplications complexes nécessaires au calcul de $P_a(\lambda)$ par l'algorithme de Hörner.

2.3.2. En déduire, en fonction de p, le nombre total des additions et multiplications complexes nécessaires au calcul de $\Phi_p(a)$ par l'algorithme de Hörner.

2.3.3. Lequel des deux algorithmes présentés ci-dessus est le plus rapide pour calculer $\Phi_p(a)$ pour p assez grand ? On donnera les ordres de grandeurs des nombres d'opérations (additions et multiplications complexes) que nécessitent chacun d'eux.

Deuxième problème

1ère partie

À tout couple (a, b) de réels, on associe le polynôme $P_{a,b} = X^3 - 3aX + 2b$.

1.1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que le polynôme $P_{a,b}$ admet au moins une racines réelle ; on pourra pour cela calculer les limites de la fonction $x \longmapsto P_{a,b}(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

1.2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1.2.1. Si $t \in \mathbb{R}$ est une racine double de $P_{a,b}$, montrer que $a = t^2$ et $b = t^3$ puis factoriser le polynôme $P_{a,b}$.

1.2.2. Montrer que si $a^3 = b^2$, alors le polynôme $P_{a,b}$ admet une racine double et la préciser.

1.3. Conclure que l'ensemble Γ des points (a, b) du plan $\mathbb{R}^2$ pour lesquels le polynôme $P_{a,b}$ admet une racine au moins double est $\Gamma = \{(t^2, t^3) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$.

1.4. On suppose que $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ et on note c une racine réelles de $P_{a,b}$; on note x_1 et x_2 les deux autres racines dans $\mathbb{C}$ de $P_{a,b}$ et on pose $\Delta = \Big((c - x_1)(c - x_2)(x_1 - x_2)\Big)^2$.

1.4.1. Calculer Δ en fonction de $|c - x_1|^2(c^2 - 4a)$ puis en fonction de $b^2 - a^3$ et en déduire que ces deux quantités sont de même signe.

1.4.2. Montrer que le polynôme $P_{a,b}$ n'a qu'une seule racines réelle (égale à c) si, et seulement si, $b^2 > a^3$. Que se passe-t-il si $b^2 < a^3$?

2ème partie

On considère la courbe paramétrée γ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ avec

$$f(t) = t^2 \text{ et } g(t) = t^3.$$

2.1. Justifier que γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que son support Γ admet un axe de symétrie à préciser.

2.2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\gamma(t)$ est un point birégulier de la courbe. Préciser la nature du point $\gamma(0)$.

2.3. Donner l'équation de la tangente $D_{\gamma(t_0)}$ à la courbe en un point $\gamma(t_0)$ avec $t_0 \in \mathbb{R}$.

2.4. Étudier les variations des fonctions f et g et les branches infinies de la courbe γ.

2.5. Dessiner le support de γ ; on placera les point $\gamma(-1)$, $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ ainsi que les tangentes à la courbe en ces points .

3ème partie

3.1. On considère un point $\gamma(t_0)$ de la courbe avec $t_0 \neq 0$.

3.1.1. Montrer que la tangente $D_{\gamma(t_0)}$ à la courbe au point $\gamma(t_0)$ rencontre Γ en un unique autre point $\gamma(t_1)$ et préciser t_1 en fonction de t_0.

3.1.2. On construit ainsi une suite $\Big(\gamma(t_n)\Big)_{n\geqslant 0}$ de point de Γ par la donnée de

$$\gamma(t_0) \in \Gamma \setminus \{(0,0)\} \text{ et } \{\gamma(t_{n+1})\} = D_{\gamma(t_n)} \cap \Gamma.$$

Étudier la suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ et en déduire le comportement de suite $\Big(\gamma(t_n)\Big)_{n\geqslant 0}$. Quelle est sa limite ?

3.2.

3.2.1. Soient t et t' deux réels ; donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres t et t' pour que les deux tangentes $D_{\gamma(t)}$ et $D_{\gamma(t')}$ à la courbe γ soient perpendiculaires.

3.2.2. Montrer que s'il passe par le point (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$ deux tangentes à la courbe γ qui soient perpendiculaires alors

$$y^2 = \frac{4}{27}\Big(x - \frac{4}{27}\Big). \tag{1}$$

3.2.3. On suppose que (x, y) est un couple de réels vérifiant la relation (1). Montrer qu'il existe deux tangentes à la courbe γ qui soient perpendiculaires et passant par le point (x, y).

3.3. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$ vérifiant la relation (1).

3.3.1. Reconnaître $\mathcal{P}$ et préciser ces éléments caractéristiques.

3.3.2. Vérifier que $X^3 - 12X + 16 = (X - 2)^2(X + 4)$ et en déduire les points d'intersections de Γ avec $\mathcal{P}$.

3.3.3. Dessiner $\mathcal{P}$ sur le même graphique que Γ.

FIN DE L'ÉPREUVE